УДК 517.9

Н. Н. НЕКРАСОВА

N. N. NEKRASOVA

**О ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСТАНДАРТНОЙ МЕТРИКОЙ**

**ABOUT HELDER SPACES WITH A NON-STANDARD METRIC**

*В данной работе сформулировано определение метрики сферы Римана, сформулировна и доказана лемма о том, что некоторая заданная функция является расстоянием и относительно этого расстояния инверсия удовлетворяет двусторонней оценке. Введено пространство Гельдера на сфере Римана.*

*Ключевые слова: Метрика, пространство Гёльдера, сфера Римана.*

*We definition of the Riemann sphere metric is formulated. We prove the lemma that some given function is a distance and with respect to this distance, the inversion satisfies a two-way estimate. We introduced the Hölder space on the Riemann sphere.*

*Keywords: Metric, Hölder space, Riemann Sphere.*

При изучении краевых задач теории функций в бесконечных областях [2] часто используют пространства функций, которые бы удовлетворяли условию Гёльдера по отношению к метрике сферы Римана [1].

**Определение.** Метрика сферы Римана – одноточечная компактификация  евклидового пространства .

Из определения следует, что дополнения к шарам, будут являться окрестностями элемента  в этой операции, которая преобразует топологические пространства в компактные. А так же, если функция  непрерывна в точке , то это означает существование предела . Компакт носит название сферы Римана, поскольку при  стереографическая проекция устанавливает гомеоморфизм компакта  на единичную сферу  трехмерного пространств. Введенный термин, так же будет сохранен, в случае, если подобную проекцию установить и для [1].

Очевидно, инверсия

 (1)

относительно сферы  с центром в точке  осуществляет гомеоморфизм компакта  на себя, причем  и . При  это преобразование будем обозначать . Заметим, что оно переставляет точки ,  и взаимно обратно. Обратным к (1), в общем случае, является преобразование .

Компакт  можно наделить естественной структурой метрического пространства. С этой целью с каждой парой его точек  свяжем неотрицательное число  по формуле



Заметим, что тогда  при .

**Лемма.** *Функция  есть расстояние. Инверсия, заданная формулой (1), относительно функции  удовлетворяет следующей двусторонней оценке:*



**Доказательство.** Чтобы доказать первое утверждение леммы проверим выпонимость неравенства треугольника для трех точек . Заметим, собственно, что это неравенство уточняется непосредственно, когда одна из данных точек совпадает с  [2]. Поэтому нужно доказать неравенство  или, что равносильно, неравенство  Достаточно убедиться, что . Данное неравенство очевидно, если одна из точек  совпадает с . В общем случае после деления на  оно переходит в где положено  и аналогично обозначение принято и для . Так как , аналогично для остальных пар точек, это неравенство совпадает с неравенством треугольника по отношению к евклидовой метрики. Перейдем к доказательству второго утверждения леммы, которое базируется на равенстве

 (2)

Заметим, что равенство (2) равносильно следующему равенству: Левая часть этого выражения равна  что совпадает с его правой частью. В силу (1), (2) расстояние  можем записать в виде



откуда  где  Остается заметить, что в силу очевидного неравенства  выполнена оценка .

**Определение.** Условие Гёльдера [3] вводится и для функций, которые заданны на произвольном метрическом пространстве, по отношению к его метрике . Для этого нужно лишь заменить выражение  в условии  на выражение . Соответствующий класс обозначим через , указывая при необходимости метрику.

Как показано в [3] это пространство является банаховым относительно нормы .

Можно также ввести класс  отображений  из метрического пространства  в  с помощью условия Гельдера 

Отметим, собственно, что все основные свойства нормированных пространств и теорема об эквивалентности общепризнанных мер в банаховых пространствах сохраняют свою силу и в данном случае, поскольку при их доказательстве специфика евклидового расстояния никак не применялась.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ковалёва Л. А., Чернова О. В. Математика как неотъемлемая компонента образования инженера-специалиста // Наука и образование: отечественный и зарубежный опыт. Сборник трудов конференции Двадцать третьей международной научно-практической конференции. - 2019. - С. 116-120.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I / А. П. Солдатов // СМФН. – 2017. – Т. 63, № 1. – С. 1–189.

**Некрасова Наталия Николаевна**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород

Магистрант кафедры «Прикладная математика и компьютерное моделирование»

Тел.: +79056759868

E-mail: nekrasova@bsu.edu.ru